Ökonomie

ganz gründlich mit vielen Aufgaben

Teil1:

Funktionen aus der Wirtschaftsmathematik bis 2. Grades

Nachfragefunktion, Angebotsfunktion, Erlösfunktion, Kostenfunktionen, Gewinnfunktionen

Alternativer Text zu 49312

der ziemlich kompakt gehalten ist.

Datei – Nr. 49301

Stand: 16. März 2011

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text ist als Begleitung zum Unterricht an beruflichen Schulen gedacht, bei denen es zur Einführung linearer und quadratischer Funktionen stets Anwendungen aus der Ökonomie gibt. Dazu findet man hier reichlich Aufgaben mit Lösungen.

Weil es zu vielen dieser Aufgaben mehrere Lösungswege gibt, findet man die meisten Lösungen auch auf zwei oder gar mehr Arten ausgeführt. Bei den quadratischen Funktionen zu Erlös und Gewinn wurden sogar ein gesonderter Abschnitt eingeführt, in dem die Methoden zur Nullstellen- und Scheitelbestimmung gezeigt werden.

So kann sich jeder seine passende Methode aussuchen.

Im nächsten Heft (49302) werden ökonomische Anwendungen zu Funktionen dritten und höheren Grades sowie einige gebrochen rationale Funktionen behandelt – siehe Inhaltsverzeichnis nächste Seite.

Im Text 49311 findet man diese Thematik ziemlich kompakt, also eher geeignet zum Wiederholen und um sich einen Überblick zu verschaffen.

Einige Lösungen wurden mit CAS-Rechnern erstellt. Im Zuge der Reformierung des Mathematik-Unterrichts können Schüler inzwischen in vielen Bundesländern diese Geräte als Hilfsmittel verwenden. Manche Funktionen sind auch so kompliziert, dass eine manuelle Lösung mit einfachen Taschenrechnern heute nicht mehr gefordert wird.

Inhalt Text 49301

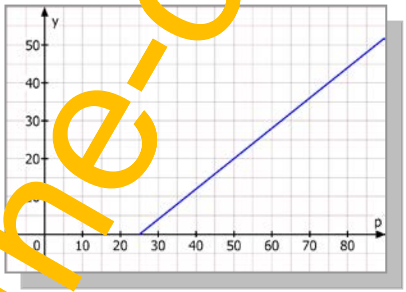
Inhalt Text 49302

1.5 Lineare Angebotsfunktion

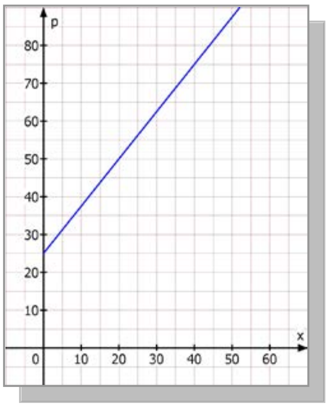
Der Produzent ist daran interessiert, möglich viel für seine Ware zu bekommen.
Je höher daher der Preis pro ME ist, desto mehr Ware wird er auf den Markt bringen.

Wir verwenden das Modellbeispiel einer linearen Angebotsfunktion:

$$\boxed{x_A(p) = 0{,}8 \cdot p - 20}$$



Sie hat den ökologischen Definitionsbereich: $D = [\ 25\ ;\ \infty\ [$,
denn der Produzent bietet in diesem Fall erst dann Ware an,
wenn der Preis über $25\,\frac{GE}{ME}$ liegt.
Die Wertmenge dieser Funktion ist $W = [\ 0\ ;\ \infty\ [$
Achtung: Jetzt ist der Preis die unabhängige Variable, die
also vorgegeben ist und daher auf der x-Achse abgetragen wird.



Stellt man die Gleichung nach p um, dann wird x die unabhängige
Variable und man erhält die Umkehrfunktion:

$$x = 0{,}8 \cdot p - 20$$

$$x + 20 = 0{,}8 \cdot p \quad |:0{,}8$$

$$\tfrac{1}{0{,}8} \cdot x + \tfrac{20}{0{,}8} = p \quad \text{bzw.} \quad \boxed{p_A(x) = 1{,}25 \cdot x + 25}$$

Diese Funktion hat den Definitionsbereich $D = [\ 0\ ;\ \infty\ [$ und

den Wertebereich $W = [\ 25\ ;\ \infty\ [$, denn

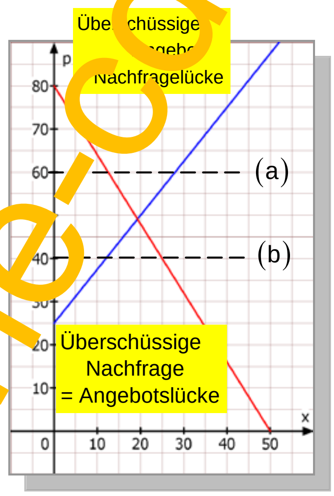
ein Preis kommt erst dann zustande, wenn Waren angeboten werden, und der Mindestpreis ist 25 GE.

Aufgaben zu diesen Angebotsfunktionen sind 1.8, 1.11 und 1.12.

1.6 Marktgleichgewicht

Bei einem Markt liegen Angebots- und Nachfragefunktion vor. Das Interesse der Produzenten (Verkäufer) und der Käufer spiegeln sich darin.

Beispiel:



Auf unserem Beispielmarkt richtet sich ein Produzent nach dieser

Angebotsfunktion: $\boxed{x_A(p) = 0{,}8 \cdot p - 20}$ bzw. $\boxed{p_A(x) = 1{,}25 \cdot x + 25}$.

Dieser steht von Seiten der Käufer diese Nachfragefunktion gegenüber:

$\boxed{x_N(p) = -0{,}625 \cdot p + 50}$ bzw. $\boxed{p_N(x) = 80 - 1{,}6 \cdot x}$

Dort wo sich die Geraden schneiden, sind beide Interessen erfüllt, also herrscht **Marktgleichgewicht.**

Berechnung des Schnittpunkts:

$$1{,}25 \cdot x + 25 = 80 - 1{,}6 \cdot x \;\Leftrightarrow\; 2{,}85 \cdot x = 55 \;\Leftrightarrow\; x = \tfrac{55}{2{,}85} \approx 19{,}30 \left(\tfrac{GE}{ME}\right)$$

Dazu gehört $p_N(19{,}30) = 80 - 1{,}6 \cdot 19{,}30 = 49{,}12 \left(\tfrac{GE}{ME}\right)$,
was man auch aus der Angebotsfunktion berechnen kann.

Ergebnis: Bei einem Preis von $49{,}12 \left(\tfrac{GE}{ME}\right)$ herrscht Marktgleichgewicht, also sind Angebot und Nachfrage ausgeglichen.

Welche Situation herrscht nun, wenn der Preis vom Produzenten höher angesetzt wird?

Bei einem geforderten Preis von $60 \left(\tfrac{GE}{ME}\right)$ (siehe Linie (a))

ist die Angebotsmenge $x_A(60) = 0{,}8 \cdot 60 - 20 = 48 - 20 = 28$ (ME)

und die Nachfragemenge: $x_N(60) = -0{,}625 \cdot 60 + 50 = 12{,}5$ (ME)

Weil der Preis so hoch ist, herrscht ein Angebotsüberschuss bzw.

eine Nachfragelücke von $x_A - x_N = 28 - 12{,}5 = 15{,}5$ (ME).

Liegt der Marktpreis unter dem des Marktgleichgewichtes, herrscht Nachfrageüberschuss,
d.h. es besteht eine Angebotslücke:

Bei einem geforderten Preis von $40 \left(\tfrac{GE}{ME}\right)$ (siehe Linie (b))

ist die Angebotsmenge $x_A(40) = 0{,}8 \cdot 40 - 20 = 32 - 20 = 12$ (ME)

und die Nachfragemenge: $x_N(40) = -0{,}625 \cdot 40 + 50 = 25$ (ME)

Weil der Preis so günstig ist, herrscht ein Nachfrageüberschuss bzw.

eine Angebotslücke von $x_A - x_N = 12 - 25 = -13$ (ME).

bzw. so berechne: $x_N - x_A = 25 - 12 = 13$ (ME).

Dies wird noch einmal in den Aufgaben untersucht.

1.7 Elementare Aufgaben zu diesen Funktionen - Lösungen am Textende

Aufgabe 1.1

Auf einem Markt erhält man zur Ausbringungsmenge x = 32 den Erlös E(32) = [illegible]47,2 GE
Stelle die Gleichung einer linearen Erlösfunktion auf.

Aufgabe 1.2

Eine Erlösfunktion hat die Gleichung $E(x) = 2{,}5 \cdot x$.
Wie viele Güter wurden verkauft, wenn der Erlös 1850 GE betrug?

Aufgabe 1.3

Die Kostenfunktion eines Unternehmens wird modellhaft mit $K(x) = 250x + 5.200$ angegeben, $x \in [0\,;30]$.
Zeichen das Schaubild in ein geeignetes Koordinatensystem. Wir groß sind die Fixkosten?
Berechne die Kosten für 16 Güter. Wie viele Güter verursachen 10.950 GE an Kosten?

Aufgabe 1.4

Die Produktion eines Unternehmens verursacht folgende Kosten:
Bei einer Produktion von 12 Gütern entstehen 4790 GE an Kosten, und bei 20 Gütern sind es 5150 GE.
Stelle die Gleichung der Kostenfunktion auf. Gib die Stückkosten und die Fixkosten an.

Aufgabe 1.5

Ein Unternehmen hat bei der Produktion eines Fahrrads 2100 € Fixkosten pro Monat.
Die Stückkosten sind 200 €. Wie lautet die Kostenfunktion? Zeichne ihr Schaubild.

Aufgabe 1.6

Die Nachfrage nach einem Gut hat folgendes ergeben: Bei einem Preis von 135 € wurden in einer bestimmten Zeitspanne 15 Güter gekauft, bei einem Preis von 204 € waren es 12.
Wie lautet die Gleichung einer zugehörenden linearen Nachfragefunktion?
Welche Definitionsbereich hat sie und welches sind die Randwerte?

Aufgabe 1.7

Eine Filiale der WSW Freizeitsport GmbH hat festgestellt, dass die abgesetzte Menge x vom Preis p abhängt und sich an der **Nachfragefunktion** $p_N(x) = 600 - 24 \cdot x$ (pro Monat) orientiert. Berechne die Nachfrage bei einem Preis von 10 € bzw. 15 €.
Bei welchem Preis wäre das Gerät unverkäuflich?

Aufgabe 1.8

a) Die Nachfrage für eine Warenmenge x bei einem Preis p je ME ist in folgender Tabelle zusammengestellt. Ermittle die Gleichung der Nachfragefunktion.

x (ME)	1	2	3	4	5	…
p $\left(\frac{GE}{ME}\right)$	5,5	5	4,5	4	3,5	…

b) Das Angebot für eine Warenmenge x bei einem Preis p ist in diese Tabelle zusammengestellt. Ermittle die Gleichung der Angebotsfunktion.

x (ME)	1	2	3	4	5	…
p $\left(\frac{GE}{ME}\right)$	2,25	2,5	2,75	3	3,25	…

c) Ermittle rechnerisch und graphisch den Gleichgewichtspreis G_1.
Welche Menge M_1 wird zum Gleichgewichtspreis G_1 umgesetzt?

d) Ermittle rechnerisch die Achsenschnittpunkte der Angebots- und Nachfragefunktion.
Welche ökonomische Bedeutung haben diese Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen?
Bestimme den ökonomischen Definitionsbereich und Wertebereich für beide Funktionen.

e) Für welche Preise besteht eine Angebotslücke (= Nachfrageüberschuss) und eine Nachfragelücke (= Angebotsüberschuss)?

Aufgabe 1.9

Die Gesamtkosten zweier Betriebe werden dargestellt durch $K_1(x) = 200 \cdot x + 12500$ bzw. $K_2(x) = 200 \cdot x + 10800$. Interpretiere diese Angaben.

Aufgabe 1.10

Durch Marktuntersuchungen wurde festgestellt, dass bei einem Preis $p_1 = 207\,\frac{GE}{ME}$ eine Menge von x_1 = 112 ME nachgefragt wird. Sinkt der Preis um $25\,\frac{GE}{ME}$, steigt die nachgefragte Menge um 35 ME.

a) Wie lautet die Gleichung der linearen Nachfragefunktion
(1) mit der Menge, (2) mit dem Preis als unabhängiger Variabler?

b) Die Kapazitätsgrenze eines Monopolisten liege bei 310 ME. Zu welchem Preis lässt sich diese Menge absetzen?

c) Welche Menge wird bei einem Preis von $97\,\frac{GE}{ME}$ nachgefragt?

d) Welche Menge wird höchstens nachgefragt? (Sättigungsmenge)

e) Bei welchem minimalen Preis wird die Nachfrage gleich Null?

f) Gib die Definitions- und Wertemenge der Nachfragefunktion an, und stelle Sie die Nachfragefunktion on der üblichen Schreibweise dar (beide Möglichkeiten).

Aufgabe 1.11

Hinweis: *Die **Angebotsfunktion** sei jetzt eine lineare Funktion* $p_A(x)$.
Hier wächst die angebotene Menge linear mit dem Marktpreis.

Eine Angebotsfunktion wird durch folgende Bedingungen dargestellt:
Bei einem Preis von $95\frac{GE}{ME}$ werden 87 ME angeboten, bei einer angebotenen Menge von 156 ME beträgt der Marktpreis $141\frac{GE}{ME}$

a) Wie lautet die Gleichung der linearen Angebotsfunktion
(1) mit dem Preis (2) mit der Menge
als unabhängiger Variabler.

b) Welche Bedeutung hat die additive Konstante, wenn die Menge die unabhängige Variable ist?

c) Der Marktpreis betrage $111\frac{GE}{ME}$. Welche Menge wird angeboten?

d) Geben Sie Definitions- und Wertemenge der Angebotsfunktion an und stellen Sie die Angebotsfunktion dar (beide Möglichkeiten der Schreibweise).

Aufgabe 1.12 *Angebotsfunktion*

Auf einem Markt wird ein Produkt erst **angeboten**, wenn der Marktpreis höher als $29\frac{GE}{ME}$ ist.
Steigt der Marktpreis um 145 $\frac{GE}{ME}$, ändert sich die Angebotsmenge um 87 ME. Für die Nachfrage gilt:
Bei einem Marktpreis von 610 $\frac{GE}{ME}$ werden 137 ME nachgefragt, bei 210 $\frac{GE}{ME}$ sind es 288 ME.

a) Bestimme die lineare Angebots- und Nachfragefunktion mit p als unabhängiger Variabler.

b) Welche ökonomische Bedeutung haben die Achsenschnittpunkte.

c) Bestimme das Marktgleichgewicht.

d) Für welche Preise besteht eine Angebotslücke / Nachfragelücke.
Führe Bespielrechnungen zu den Preisen 400 $\frac{GE}{ME}$ und 300 $\frac{GE}{ME}$ durch.

2 Erlösfunktion, Gewinnfunktion und Kostenfunktion

2.1 Kurze Einführung

Die Firma WSW Freizeitsport GmbH produziert als **Monopolist** ein neuartiges Gerät für Freizeitsport. Die **Preis-Absatz-Funktion** betrug $p(x) = 600 - 5x$.

Daraus ergab sich die Erlösfunktion: $\boxed{E(x) = x \cdot p = -5x^2 + 600x}$

Die Betriebskosten werden jetzt gegeben durch $\boxed{K(x) = 4000 + 150 \cdot x}$.

Unter dem Gewinn versteht man die Differenz aus Erlös (Umsatz) und Kosten:

Daraus folgt diese Gewinnfunktion: $\boxed{G(x) = E(x) - K(x)}$

$$G(x) = -5x^2 + 600x - (4000 + 150x)$$

$$\boxed{G(x) = -5x^2 + 450x - 4000}$$

Untersuchung der Gewinnfunktion G:

Wirtschaftlich gesehen ist ein Gewinn nur dann Vorhanden, wenn $G(x) > 0$. Wir suchen also den Bereich zwischen den Nullstellen.

Die Bedingung $G(x) = 0$ **führt zu** zwei Nullstellen:

$$-5x^2 + 450x - 4000 = 0 \quad |:(-10)$$

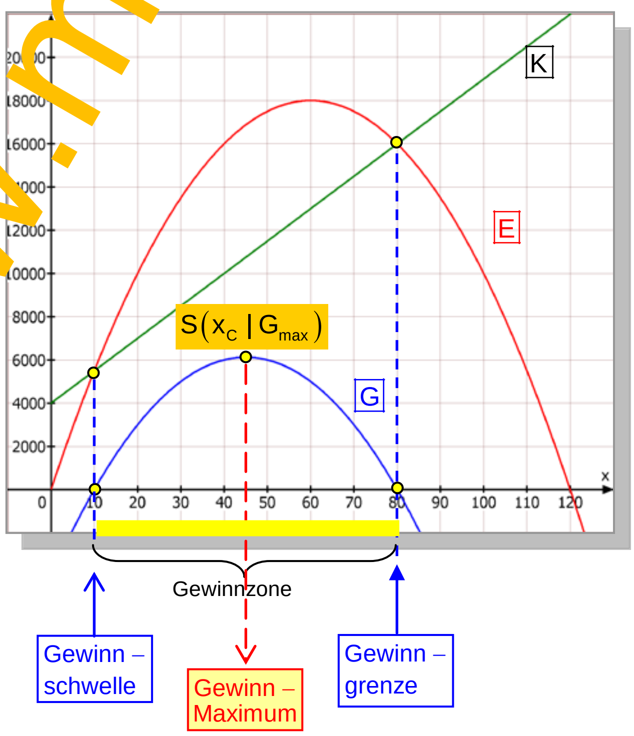
$$\tfrac{1}{2}x^2 - 45x + 400 = 0$$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sie liefert: $x_{1,2} = \dfrac{45 \pm \sqrt{45^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 400}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$

$$x_{1,2} = 45 \pm \sqrt{2025 - 800} = 45 \pm \sqrt{1225} = 45 \pm 35 = \begin{cases} 10 \\ 80 \end{cases}$$



Für x = 10 und für x = 80 ist der Gewinn 0, die **Gewinnzone** ist also der Bereich $10 < x < 80$.
Die kleinere Nullstelle nennt man die Gewinnschwelle **(Break-Even-Point)**, die größere die **Gewinngrenze**. Diese beiden Nullstellen liegen natürlich genau dort, wo sich die Kostenkurve und die Erlöskurve schneiden. Dort sind deren Werte gleich: $E(x) = K(x)$, was zum Gewinn 0 führt.
Auf der Mittellinie zwischen den Nullstellen liegt der Parabelscheitel, dessen y-Koordinate das Gewinnmaximum angibt, es liegt bei $x_C = \frac{1}{2} \cdot (10 + 80) = 45$ und beträgt $G(45) = 6125\ (€)$
Statt Gewinnschwelle sagt man auch **Nutzenschwelle** und statt Gewinngrenze auch **Nutzengrenze**.

2.2 Quadratische Funktionen – Grundwissen

Usw.